

ランプパターンの転移問題*

——単因子論の一応用——

岩 堀 長 慶**

(Received October 31, 1980)

§1. 序

本稿では『数学的には見掛け上かけはなれた分野に存在する種々の問題群が、実は同じ地下水で結ばれていて、時々その神秘的な合致性を具体例で演出して見せる』——ということ、成る可く簡単な初等的な範囲の数学を予備知識として、いろいろな例で説明して見たい。

勿論上述の現象は、“高級”な程度になればなる程、分野間の見掛けのかけ離れ方が大きくなるから、現象の合致の神秘性も強く感じられ、より効果的であろう。

本論に入る前に、若干の専門語を使って、上述の例のうち、筆者の知っている若干を実例として述べておくことにする。

例 1. 単連結・単純・複素リー群の全体 \mathfrak{G} といくつかの特殊な形をしたグラフの全体 Γ との間に 1 対 1 対応があり、 $\mathfrak{G} \ni G_1, G_2$ の間の同型関係 $G_1 \cong G_2$ は、対応するグラフ $r_1, r_2 \in \Gamma$ の間の同型関係 $r_1 \cong r_2$ と同値となっている。例えば群 $SL(n, C) \in \mathfrak{G}$ に対応するのは r : $\bigcirc - \bigcirc - \cdots - \bigcirc - \bigcirc$ (頂点数 $n-1$ 個) というグラフで、 G の Dynkin Diagram と呼ばれている。

この事から、群 G の性質は凡て対応する r の性質に翻訳され、逆に r の性質は凡て G の性質に云い換えられてしまう。 r の性質はグラフの incidence matrix, 例えば上述の $SL(n, C)$ に対応する r の incidence matrix は、 $n=5$ ならば

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という形である。しかしこの翻訳原理を個別の問題に直すと、解き難い難問も生ずる。判っている事柄の例では、例えば G の全自己同型群 $\text{Aut}(G)$ を、全内部自己同型群 $\text{I}(G)$ で割った商群 $\text{Aut}(G)/\text{I}(G)$, 所謂 G の外部自己同型群は、対応するグラフ r の全自己同型群 $\text{Aut}(r)$ と同型になる。(例えば $SL(n, C) = G$ の例では、 $n \leq 2$ なら $\text{Aut}(G)/\text{I}(G) \cong \text{Aut}(r) = \{e\}$, $n \geq 3$ なら、 $\text{Aut}(G)/\text{I}(G) \cong \text{Aut}(r) \cong \mathbb{Z}_2$ (位数 2 の巡回群) となる。) 他の例

* 本稿は 1980 年 5 月 16 日、東京女子大学学会主催で行なわれた講演のために書かれたものである。

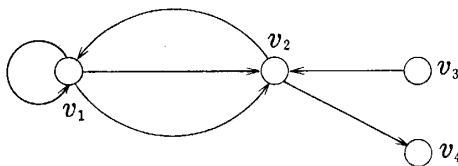
** 東京大学理学部

では G の Poincaré 多項式 $P_G(t) = \sum p_i t^i$ (p_i : G の i 次元 Betti 数) は, 対応する γ の incidence matrix の固有値が分れば書き下せる——等がある。

例 2. 連結コンパクトなリーマン面の全体 \mathfrak{R} と, 一変数代数函数体の全体 \mathfrak{R} との間に同型関係を保存する 1 対 1 の対応がある。 $\mathfrak{R} \ni R \mapsto K \in \mathfrak{R}$ は, K として, $R \xrightarrow{f} C \cup \{\infty\}$ (リーマン球面) なる analytic map (但し $f(R) \neq \{\infty\}$) の全体のなす体をとる。 $\mathfrak{R} \ni K \mapsto R \in \mathfrak{R}$ は, R として, K の \mathbb{Z} -valued discrete valuation ν で, C 上 trivial (i. e. $\nu(C^*) = \{0\}$) なるものをとる。 R に関する全命題は対応する K に関する命題に翻訳される。(逆も成り立つ。)(これについては名著「代数函数論」(岩沢健吉著, 岩波書店) 参照。)

例 3. 上例 1 の Dynkin Diagram のうち, A, D, E 型と呼ばれるものがある。一方代数幾何で孤立特異点をもつ 3 次元空間中の曲面 $f(x, y, z) = 0$ のうち, 有理 2 重点の起る場合は, その “Dynkin Diagram” を調べると丁度 A, D, E が出て来る。(これは何故かという事について最近 Brieskorn や Slodowy による対応する群と特異点の間に直接の関係づけがなされた。)

例 4. P. Gabriel は有限個の頂点 v_1, \dots, v_n をもつ有向グラフ (例えば下図)



が与えられた時, 各頂点 v_i に有限次元複素ベクトル空間 V_i を置き, 各矢印線に線型写像を置く仕方の総数 (同型を除いて) を考えた。但し, 二つの置き方が同型とは, 各ベクトル空間中に適当な基底をとる時, 対応する線型写像が同じ行列で表わされる事をいう。さてこの時, どんな非負整数列 (m_1, \dots, m_n) に対しても, $\dim V_i = m_i$ ($1 \leq i \leq n$) を満たす置き方 (線型写像の置き方は任意でよい) の個数 $f(m_1, \dots, m_n)$ が $< \infty$ であるような有向グラフを有限型という。Gabriel の定理として次の驚くべき事実がある: 有向グラフが有限型 \Leftrightarrow Dynkin Diagram A, D, E 型 (向きづけは任意)。この際個数 $f(m_1, \dots, m_n)$ は向きづけには依らぬ事も知られている。

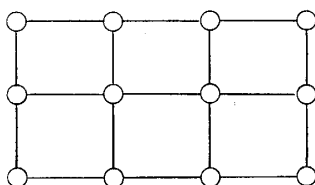
例 5. McKay 現象. A, D, E 型の binary polyhedral group, 即ち, $SU(2)$ の有限部分群 \tilde{G} で, covering map $SU(2) \xrightarrow{\varphi} SO(3)$ による像 $G = \varphi(\tilde{G})$ が, それぞれ巡回群 (A_n 型), 正二面体群 (D_n 型), 正四面体群 (E_6 型), 正八面体群 (E_7 型), 正廿面体群 (E_8 型) となるものを考える。すると, A, D, E 型の extended Dynkin Diagram の incidence matrix をそれぞれ X_A, X_D, X_E とするとき, これら X の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とし, λ_i の適当な固有ベクトル $x_i = \begin{pmatrix} \xi_{i1} \\ \vdots \\ \xi_{in} \end{pmatrix}$ をとって, これらを並べて作った行列 (ξ_{ij}) が, 何と対応する binary polyhedral group \tilde{G} の character table に一致する——という発見が

最近 John McKay (及び David Ford) によってなされている。これも事実上 (計算して
 試してみると) 正にその通りなのだが, “何故そうなのか” という本質的な満足のある説
 明が未だにわかっていない。人はここでも再び A, D, E に出会ったのである。

§2. ランプパターンの転移問題

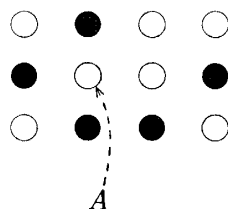
さて §1 では割と “むつかしそうな” 実例ばかり述べ立てたので, 易しい話で, 数学的
 には一見かけ離れている事が実は密接に関係する例を述べて見よう。

$m \times n$ の矩形状にランプが配置されているとする。例えば $m=3, n=4$ なら, $3 \times 4 =$
 12 個のランプが並び

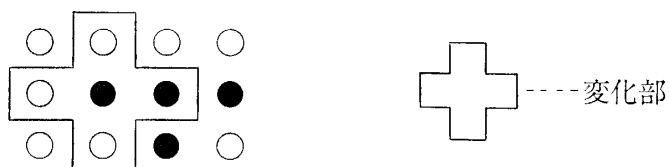


である。ここで次の約束をする。(i) 各ランプは点燈 (on) か消燈 (off) かの 2 つの状態の
 何れかである。(従って, 全ランプの on-off 状態——ランプパターン——の総数は, 2^{mn}
 個である。) (ii) 一つのランプパターンに於て, あるランプを押すと, そのランプ自身と,
 そのランプの上, 下, 左, 右 (もしあれば) にあるランプだけは on-off 状態が入れ代わ
 る。しかし他のランプはそのままである。

例えば ●=off, ○=on とし, ランプパターン



において, A と指示したランプを押すと, ランプパターンは



になる訳である。さて, それでは, 次々にランプを押して行って移り合うような 2 つのラ
 ンプパターンを同値と呼んで, 2^{mn} 個のランプパターン全体のなす集合 \mathfrak{X} に同値関係 \sim
 を定めるとき, \mathfrak{X} はいくつの同値類に分かれるか?

$m=n=3$ の形でこの問題は 1979 年 9 月, 東大理学部情報科学科の大学院二次入試問
 題に出されている。同学科の大学院生の市吉氏や金崎氏及び同学科教授米田氏の面白い研
 究がある。それを少々変形して, また別の見地もいれて以下に紹介する。

§3. 同値類の個数を与える公式 (その一)

標数 2 の素体 $k=F_2$, 即ち 2 元 0, 1 からなる体がこの問題解決に活躍する。(一般にランプの on-off 問題では F_2 が essential に働く。on, off 以外に, 例えば, 赤色点燈状態や黄色点燈状態と off 状態の 3 種類の点滅状態を考えるならば, 標数 3 の素体 F_3 が活躍するのである。)

ランプパターン (\mathfrak{X} の元) は, k の元を成分とする $m \times n$ 行列 $X=(x_{ij})$ で表わされる。即ち, i 行 j 列の交叉点にあるランプが on なら $x_{ij}=1$, off なら $x_{ij}=0$ とおく。例えば上例の $m=3, n=4$ なら

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。それでは (p, q) 位置にあるランプを押すことは, 行列の言葉で言えばどういうことか? そのため, (p, q) 成分のみ $=1$ で, 他の成分は凡て $=0$ なる $m \times n$ 型の (k 成分の) 行列を E_{pq} と書く。さらに行列 F_{pq} を

$$F_{pq} = E_{pq} + E_{p-1,q} + E_{p+1,q} + E_{p,q-1} + E_{p,q+1}$$

で定義する。(index $p-1, p+1$ が ≤ 0 又は $> m$ になれば対応する $E_{p-1,q}$ や $E_{p+1,q}$ は除く。index $q-1, q+1$ が ≤ 0 又は $> n$ となる場合も同様である。) 例えば

$$F_{11} = E_{11} + E_{12} + E_{21}$$

$$F_{21} = E_{21} + E_{11} + E_{31} + E_{22}$$

$$F_{22} = E_{22} + E_{12} + E_{32} + E_{21} + E_{23}$$

etc. である。

さて, ランプパターン X において, (p, q) 位置にあるランプを押すことは, $X + F_{p,q} = Y$ を作ることである。よって, $\mathfrak{X} \in X, Y$ が同値とは, $(p_1, q_1), \dots, (p_r, q_r)$ を適当にとれば

$$Y = X + F_{p_1, q_1} + F_{p_2, q_2} + \dots + F_{p_r, q_r}$$

となることである。換言すれば, k 成分の $m \times n$ 行列の全体 \mathfrak{X} のなす k 上のベクトル空間 ($\dim \mathfrak{X} = mn$) において, $F_{p,q}$ ($1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n$) の張る部分空間を \mathfrak{X}_0 とすれば, $X, Y \in \mathfrak{X}$ に対して

$$X \sim Y \Leftrightarrow X - Y \in \mathfrak{X}_0 \Leftrightarrow X \equiv Y \pmod{\mathfrak{X}_0}$$

が成り立つ。よって, 求める同値類の個数 $f(m, n)$ は商ベクトル空間 $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_0$ の元の個数に等しい。

よって, $\dim \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_0 = d$ とおくと

$$f(m, n) = 2^d$$

により $f(m, n)$ が与えられる。では d を求めるにはどうしたらよいであろうか?

§4. 同値類の個数公式 (その二: d の決定)

線型写像 $\varphi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ を作って, $\varphi(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_0$ とすることが出来れば, $\dim \mathfrak{X}/\mathfrak{X}_0$ は, φ の核

$$\begin{aligned} f(t) \cdot v &= (\alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_r A^r) v \\ &= f(A) v \end{aligned}$$

と定める。これにより V は $k[t]$ 加群となる。同様に U も $g(t) \cdot u = g(J)u$ により $k[t]$ 加群となる。 U も V も (k 上有限次元だから) 有限生成の $k[t]$ 加群である。 $k[t]$ は単項イデアル環 (そのどのイデアルも単項イデアル) だから, $k[t]$ 加群 U, V の構造は有名な方法で計算できる (後述)。

さて, $X \in \mathfrak{N}$ を定める条件 $JX = XA$ は, X の定める線型写像 ϕ を用いて言い直せる。即ち次の通りである。

$$X \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow \phi: V \rightarrow U \text{ は } k[t] \text{ 準同型写像}$$

何故なら, ϕ が $k[t]$ 準同型 $\Leftrightarrow \phi(f(t)v) = f(t)\phi(v)$ ($\forall f(t) \in k[t], \forall v \in V$) $\Leftrightarrow \phi(tv) = t\phi(v)$ ($\forall v \in V$) $\Leftrightarrow XAv = JXv$ ($\forall v \in V$) $\Leftrightarrow XA = JX \Leftrightarrow X \in \mathfrak{N}$ 。

かくして, \mathfrak{N} は $L = \text{Hom}_k(V, U)$ の部分空間 $\text{Hom}_{k[t]}(V, U)$ となった。この \mathfrak{N} をよく見るためには, V, U の構造 ($k[t]$ 加群としての) を知る必要がある。それがアーベル群の基本定理の拡張として有名な次の定理である。

定理 5.1. V, U は $k[t]$ 加群として

$$\begin{aligned} V &\cong k[t]/(f_1) \oplus \cdots \oplus k[t]/(f_r) \quad (\forall f_i \neq 1), \\ U &\cong k[t]/(g_1) \oplus \cdots \oplus k[t]/(g_s) \quad (\forall g_j \neq 1) \end{aligned}$$

となる。但し, $(f_i), (g_j)$ は $k[t]$ の単項イデアル $k[t]f_i, k[t]g_j$ を表わす。そして $f_i | f_{i+1}, g_j | g_{j+1}; f_1 \cdots f_r, g_1 \cdots g_s \neq 0$ 。さらに f_i, g_j を具体的に求めるには次のようにすればよい。

行列 $tI_n - A_n$ の p 次小行列式の全体を G_1, \dots, G_q とし, その G.C.D. (最大公約式) (G_1, \dots, G_q) を $D_p(t)$ とおく ($D_p(t)$ は $tI_n - A_n$ の第 p 行列式因子と呼ばれる多項式である)。すると $D_p | D_{p+1}$ ($1 \leq p \leq n-1$) となる。そこで $e_p(t) = D_p(t)/D_{p-1}(t)$ (但し $D_0 = 1$) ($1 \leq p \leq n$) とおく。($e_p(t)$ は $tI_n - A_n$, 又は A_n の第 p 単因子と呼ばれる多項式である。) すると, $e_p | e_{p+1}$ ($1 \leq p \leq n-1$) となる。 e_1, \dots, e_n のうち, $=1$ なるものを省いて残りを f_1, \dots, f_r とおけばよい。

同様に, $tI_m - J_m$ の単因子を e'_1, \dots, e'_m とし, そのうち $=1$ なるものを省いて残りを g_1, \dots, g_s とおけばよい。

§ 6. 単因子の計算, d を与える公式

我々の行列 A_n, J_m に対し, その単因子を計算すると,

$$\begin{aligned} A_n \text{ のとき } & \cdots (1, \dots, 1, \tilde{J}_n(t)) \quad \text{但し, } \tilde{J}_n(t) = \det(tI_n - A_n) \\ J_m \text{ のとき } & \cdots (1, \dots, 1, \tilde{J}_m^*(t)) \quad \text{但し, } \tilde{J}_m^*(t) = \det(tI_m - J_m) \end{aligned}$$

がわかる。よって, 定理 5.1 により, $k[t]$ 加群として

$$V \cong k[t]/(\tilde{J}_n), \quad U \cong k[t]/(\tilde{J}_m^*)$$

がわかる。さて, ところが

Lemma 6.1. $\text{Hom}_{k[t]}(k[t]/(\tilde{J}_n), k[t]/(\tilde{J}_m^*))$ は $k[t]/(\theta(t))$ に $k[t]$ 加群として同型であ

る。但し、 $\theta(t) = \text{G.C.D.}(\tilde{J}_m, \tilde{J}_n^*)$ 。

(証明) $k[t]$ 加群 $k[t]/(\tilde{J}_n)$ から $k[t]$ 加群 $k[t]/(\tilde{J}_m^*)$ への $k[t]$ 準同型写像は、1 の剰余類 $1+(\tilde{J}_n)$ の行先きで決まる。この行く先きとしてとれる剰余類は、簡単な計算で、 $\tilde{J}_m^*(t) = g(t) \cdot \theta(t)$ とおくと、

$$h+(\tilde{J}_m^*), \text{ 但し, } g|h$$

なる形のものであることがわかる。よって、かかる $k[t]$ 準同型全体は $k[t]$ 加群として $(g)/(\tilde{J}_m^*)$ に同型となる。ところが $(g)/(\tilde{J}_m^*) \cong (g)/(g\theta) \cong k[t]/(\theta)$ であるから、証明が完了する。

これにより、問題の次元 $d = \dim \mathfrak{R}$ は、 k 上のベクトル空間 $k[t]/(\theta)$ の次元に等しいことが分った。ところが $\theta(t)$ の次数を d' とすると、このベクトル空間は剰余類 $1+(\theta)$, $t+(\theta)$, \dots , $t^{d'-1}+(\theta)$ を k 上の基底としてもつから、 k 上 d' 次元である。よって、 $d = d'$ 、従って次の定理がわかった。

定理 6.2 (市吉). $m \times n$ 型ランプパターンの全体は 2^d 個の同値類に分かれる。ここで d は

$$\text{G.C.D.}(\det(tI_n - A_n), \det(tI_m - J_m))$$

の次数である。

§7. 実地計算法のための漸化式, Fibonacci 数列との類似

以下の計算の (後からわかる) 便利さのために index をずらして

$$\begin{aligned} \det(tI_n - A_n) &= \Delta_{n+1}(t) \quad (= \tilde{J}_n(t)) \\ \det(tI_m - J_m) &= \Delta_{m+1}^*(t) \quad (= \tilde{J}_m^*(t)) \end{aligned}$$

とおく。 $J_m = I_m + A_m$ から

$$\Delta_{m+1}^*(t) = \Delta_{m+1}(t)$$

がわかる。又、 $\Delta_0(t) = \Delta_0^*(t) = 0$, $\Delta_1(t) = t$, $\Delta_1^*(t) = t+1$ とおく。

行列式の余因子展開 (最後の列で) により

$$\begin{aligned} \Delta_i(t) &= t\Delta_{i-1}(t) - \Delta_{i-2}(t) \\ &= t\Delta_{i-1}(t) + \Delta_{i-2}(t) \end{aligned}$$

($\because k$ は標数 2) を得る。従って

$$\Delta_i^* = t\Delta_{i-1}^* + \Delta_{i-2}^*$$

も成り立つ。これにより、負の整数に対しても、上の漸化式により、 Δ_{-i} , Δ_{-i}^* を定める。すると、任意の整数 n に対し

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \Delta_{n-1} & \Delta_n \\ \Delta_n & \Delta_{n+1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \Delta_{n-1}^* & \Delta_n^* \\ \Delta_n^* & \Delta_{n+1}^* \end{pmatrix} \quad (2)$$

の成立がわかる。Fibonacci 数列

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, \dots \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \end{aligned}$$

で上と同様に a_{-n} も定めてやると、各整数 n に対して

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

が成り立つのと全く同様である。(3) を用いて

$$n \mid m \Rightarrow a_n \mid a_m$$

や、更に進んで $\text{G.C.D.}(n, m) = l$ の時 $\text{G.C.D.}(a_n, a_m) = a_l$ が簡単に示せるのと全く同様にして、

$$i \mid j \Rightarrow \Delta_i \mid \Delta_j, \Delta_i^* \mid \Delta_j^*$$

や、 $\text{G.C.D.}(i, j) = l$ の時

$$\text{G.C.D.}(\Delta_i, \Delta_j) = \Delta_l, \quad \text{G.C.D.}(\Delta_i^*, \Delta_j^*) = \Delta_l^*$$

が得られる。

Δ_i, Δ_j^* の G.C.D. を調べる為には、 $k = \mathbf{F}_2$ の代数的閉包 \bar{k} 中で、 Δ_i, Δ_j^* の根の状況を知る必要がある。 $\Delta_i(t) = 0$ の根のみ調べればよい。 $(\Delta_j^*(t) = \Delta_j(t+1))$ だから。

Lemma 7.1. 変数 s を用いて、 t を $s+1/s$ で置き換えれば

$$\begin{aligned} \Delta_n(t) &= \frac{1}{s^{n-1}} \{1 + s^2 + s^4 + \dots + s^{2(n-1)}\} \\ &= \frac{1}{s^{n-1}} \left(\frac{1-s^n}{1-s} \right)^2 \end{aligned}$$

(証明) 右辺を $D_n(s)$ とおくと、漸化式

$$D_{n+1} = \left(s + \frac{1}{s} \right) D_n + D_{n-1}$$

及び $D_0 = 0, D_1 = 1$ がわかるから。(証終)

これから n が奇数なら $\Delta_n(t)$ の根が皆 $\xi + 1/\xi$ ($\xi \neq 1, \xi^n = 1$) の形になり、 $\Delta_n(t)$ の既約因子の形がわかる。

また n が偶数ならば、 $n = 2j$ の時

$$\Delta_{2j} = t \Delta_j^2$$

を得る。実際

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta_{2j-1} & \Delta_{2j} \\ \Delta_{2j} & \Delta_{2j+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}^{2j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}^j \\ &= \begin{pmatrix} \Delta_{j-1} & \Delta_j \\ \Delta_j & \Delta_{j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{j-1} & \Delta_j \\ \Delta_j & \Delta_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{j-1}^2 + \Delta_j^2 & \Delta_j(\Delta_{j-1} + \Delta_{j+1}) \\ \Delta_j(\Delta_{j-1} + \Delta_{j+1}) & \Delta_j^2 + \Delta_{j+1}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta_{2i} = \Delta_i(\Delta_{i-1} + \Delta_{i+1})$$
$$\Delta_{2i} = t\Delta_i^2$$
$$\Delta_n = t^{1+2+4+\dots+2^{p-1}} \Delta_m 2^p$$

次に $\Delta_n(t)$, $\Delta_m^*(t)$ の若干の表と, $d_{m,n} = \text{G.C.D.}(\Delta_m^*, \Delta_n)$ の次数の表を述べる (注意. $2^{d_{m,n}}$ は $(m-1) \times (n-1)$ 型のランプパターンの同値類の個数である!)

n	$\Delta_n(t)$	$\Delta_n^*(t)$
0	0	0
1	1	1
2	t	$t+1$
3	t^2+1	t^2
4	t^3	t^3+t^2+t+1
5	t^4+t^2+1	t^4+t^2+1
6	t^5+t	t^5+t^4
7	t^6+t^4+1	t^6+t^2+1
8	t^7	$t^7+t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+1$

[illegible]

数列 $d_{m,1}, d_{m,2}, d_{m,3}, \dots$ は純循環する。それをいうのは、有限個の元よりなる環 $k[t]/(\Delta_m^*) = \mathbb{O}$ の元のなす列 $\Delta_n + (\Delta_m^*)$, $n=1, 2, \dots$, が純循環であることをいえばよい。それには、行列

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

を \mathbb{O} 上の行列と見做せば, $\det S = -1$ より, $S \in GL(2, \mathbb{O})$ となる。従って, 或る自然数 N があって $S^N = I_2$ となる。よって, $S^j = S^{j+N}$ ($j=1, 2, \dots$)。即ち,

$$\Delta_j \equiv \Delta_{j+N} \pmod{\Delta_m^*} \quad (j=1, 2, \dots)$$

従って,

$$\text{G.C.D.}(\Delta_j, \Delta_m^*) = (\Delta_{j+N}, \Delta_m^*) \quad \therefore \quad d_{m,j} = d_{m,j+N}$$

i.e. $d_{m,j} = d_{m,j+N} = d_{m,j+2N} = \dots$ ($j=1, 2, \dots$)。

表の周期の計算値は雨宮一郎教授の周期の計算法によるものである。

ランプパターンの点滅法則を変えることにより, 他の種々の問題が考えられる。例えば, それ自身は点滅状態を変えず, 上下左右にあるランプのみ点滅状態が反転する——という約束から出発すると, 上の方法と同様な推論で, 結局, $m \times n$ 型の盤のランプパターンの全体は, $\text{G.C.M.}(\Delta_{m+1}, \Delta_{n+1})$ の次数を d として, 2^d 個の同値類に分かれる。ところが, 既述 (§7) より $\text{G.C.D.}(m+1, n+1) = l$ とおくと, $\text{G.C.D.}(\Delta_{m+1}, \Delta_{n+1}) = \Delta_l$ だから, その次数 d は $d = l - 1$ である。

また上の周期の存在は, Fibonacci 数列 a_1, a_2, \dots のような場合にも全く同じ論法で通用する。任意の自然数 n をとり, a_j を n で割った余りを b_j とすれば, b_1, b_2, b_3, \dots は純循環である。その周期は, 例えば n が素数 p の時は $GL(2, p)$ の位数 $p(p^2-1)(p-1)$ の約数である。より詳しくいえば, $GL(2, p)$ の元 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の位数である。 $p \neq 5$ なら $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は等根でないから, 周期は p^2-1 の約数となる (対角化した行列を考えよ。) $p=5$ なら周期は 20 となる。このように “基本的構造” が一致している故に, Fibonacci 数列にも, ランプパターンの量に関する数列についても同様の推理と結論が生ずるのである。

[付記] $\Delta_n(t)$ において t に $s+s^{-1}$ を代入すると簡単な式になった (Lemma 7.1) のであるが, $\Delta_n^*(t) = \Delta_n(t+1)$ の方はそうは行かない。 $\Delta_n^*(s+s^{-1})$ を graphical に表示してみると, 非常に美しい法則性を感じさせる無限の模様が生ずる。それが筆者の講演中に掲げた模様である。その作り方について以下に簡単に説明しよう。いま

$$\Delta_n^*(s+s^{-1}) = a_{-n+1}^{(n)} s^{1-n} + \dots + a_{-1}^{(n)} s^{-1} + a_0^{(n)} + a_1^{(n)} s + \dots + a_{n-1}^{(n)} s^{n-1}$$

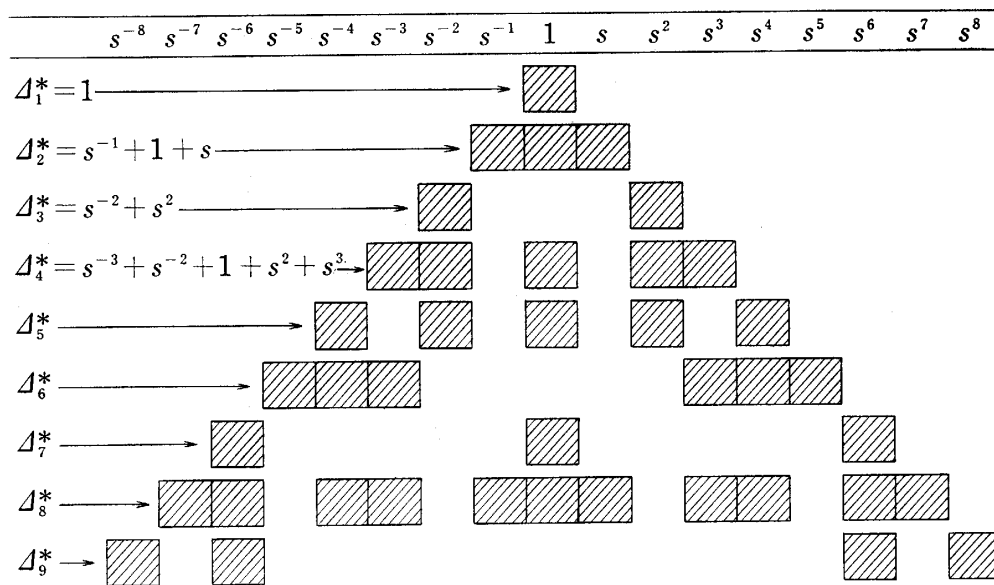
とおく (但し, $a_i \in k = \mathbf{F}_2$)。すると $a_i^{(n)} = a_{-i}^{(n)}$, $a_{n-1}^{(n)} = a_{1-n}^{(n)} = 1$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) が直ぐわかる。更に漸化式

$$\Delta_n^*(s+s^{-1}) = (s+s^{-1}+1)\Delta_{n-1}^*(s+s^{-1}) + \Delta_{n-2}^*(s+s^{-1})$$

を用いて係数を比較すると

$$a_i^{(n)} = a_{i-1}^{(n-1)} + a_{i+1}^{(n-1)} + a_i^{(n-1)} + a_i^{(n-2)}$$

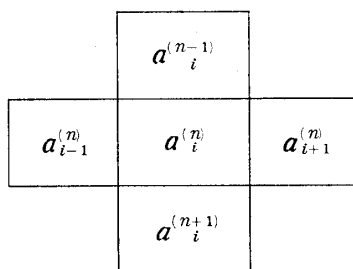
が得られる。そこで平面を小正方形網に無限分割し、その第0段には $\Delta_0^*(s+s^{-1})=0$ により何も書かぬ。第1段には $\Delta_1^*(s+s^{-1})=1$ により、中央正方形を黒く塗る。第2段は $\Delta_1^*(s+s^{-1})=s^{-1}+1+s$ により、中央及びその左右を黒く塗る。一般に $\Delta_n^*(s+s^{-1})=\sum a_i^{(n)}s^i$ において第 n 段には、 $a_i^{(n)}=1$ の時 s^i の下の所に黒を塗り、 $a_i^{(n)}=0$ なら何も塗らぬことにする。このようにして次図を得る。



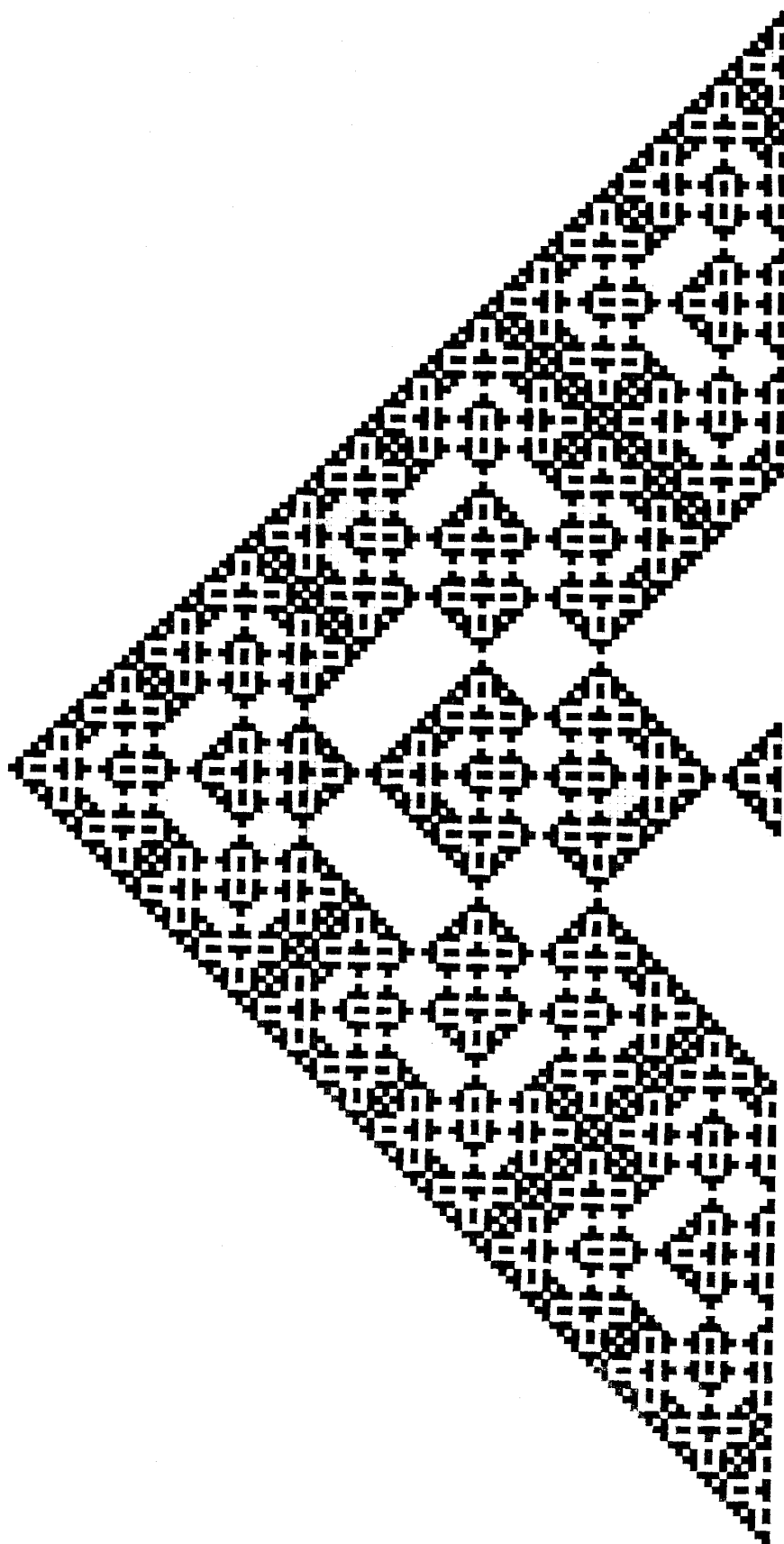
この図の描き方（例えばコンピューターに描かせる時の）は次のようにすればよい。今第1～第 n 段が既に描かれたとしよう。この時上の関係式により

$$a_i^{(n+1)} = a_{i-1}^{(n)} + a_{i+1}^{(n)} + a_i^{(n)} + a_i^{(n-1)}$$

(F_2 での和!) で $a_i^{(n+1)}$ を作ればよい。即ち



の5ヶ所にある黒色正方形の総数が偶数となるように $a_i^{(n+1)}$ を決めればよい。 Δ_n^* の漸化式をそのままにして、初期条件を種々に変えて、例えば $\Delta_0^*=0$, $\Delta_1^*=1+s$ とか、或いは $\Delta_0^*=0$, $\Delta_1^*=s^{-1}+1+s$ として、上図とは良く似た、しかし全体としては全く印象のちがったデザインが生ずる。しかし原図（次頁の図）の場合が不思議な対称感と2倍々々の無限増殖性を最も明瞭に示しているように思われる。何かこの場合は“自然な”場合であるらしい。



Transition Problem of Lamp Patterns

—An Application of the Elementary Divisor Theory—

Nagayoshi IWAHORI*

Abstract

An $m \times n$ lamp pattern is a distribution of the on-off states of the mn lamps arranged in an $m \times n$ rectangular array. If one touches one of the lamps, then the on-off status of that lamp, and of the vertically-adjacent or horizontally-adjacent lamps will all be reversed. This is a basic transition, and these transitions applied successively define an equivalence relation among the set of the $m \times n$ lamp patterns.

This paper is concerned with determination of the number of the equivalence classes of the $m \times n$ lamp patterns. It is shown that the class number is given by 2^d , with the degree d of the polynomial

$$\text{G.C.D.}(\det(xI_n - A_n), \det((x-1)I_m - A_m)),$$

where I_n is the unit matrix and A_n is the incidence matrix of a basic transition, containing 1 on the two lines parallel and adjacent to the main diagonal and 0 elsewhere.

* University of Tokyo.